TEMA 5

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS

La complejidad de la red de puertas lógicas que resulta al implementar una función booleana, está directamente relacionada con la complejidad de la expresión algebraica de la misma.

Minimizar el circuito lógico => procedimientos de simplificación

Criterio utilizado : obtener una expresión en forma de suma de productos o producto de sumas que minimice el número de términos y el número de variables en cada término.

Métodos de simplificación :

- **Reducción algebraica** : aplicación analítica de algunos axiomas y teoremas del álgebra de Boole. Inconveniente: escasa sistematización.
- **Mapa de Karnaugh-Veitch**: simplificación de tipo gráfico, que permite el tratamiento eficiente de funciones de hasta cinco o seis variables.
- **Quine-McCluskey**: para funciones más complejas, sistematización prácticamente total del algoritmo de simplificación, implementación como programa informático.

MÉTODO ALGEBRAICO DE SIMPLIFICACIÓN

La mayoría de los métodos de simplificación de funciones lógicas utilizan la siguiente **propiedad** del álgebra de Boole:

$$X_1X_2X_3...X_N + X_1'X_2X_3...X_N = X_2X_3...X_N$$

$$(X_1+X_2+X_3+...+X_N)(X_1'+X_2+X_3+...+X_N) = X_2+X_3+...+X_N$$

⇨ la suma de dos productos canónicos adyacentes (los que se diferencia únicamente en el estado de una de sus variables) se reduce a un solo producto en el que se ha eliminado la variable que cambia de estado. La segunda expresión es la dual de la primera, indica lo mismo para las sumas canónicas.

MÉTODO ALGEBRAICO DE SIMPLIFICACIÓN

La mayoría de los métodos de simplificación de funciones lógicas utilizan la siguiente **propiedad** del álgebra de Boole:

$$X_1X_2X_3...X_N + X_1'X_2X_3...X_N = X_2X_3...X_N$$

$$(X_1+X_2+X_3+...+X_N)(X_1'+X_2+X_3+...+X_N) = X_2+X_3+...+X_N$$

La aplicación directa de esta propiedad a las expresiones constituye el elemento básico del método algebraico de simplificación de funciones..

Para obtener una expresión mínima en suma de productos o producto de sumas partiremos de la forma canónica correspondiente (la función nos vendrá dada por su tabla de verdad).

A priori no puede saberse cual de las dos expresiones será más simple => obtendré las dos y utilizaré la mas sencilla.

EJEMPLO: Sea la función $F(x,y,z)=\sum_3(0,2,3,4,5,7)$.

$$F(x,y,z) = \underbrace{x'yz' + \overbrace{x'y'z'}_{x'z'} + xy'z'}^{y'z'} + \underbrace{x'yz + \overbrace{xyz}_{yz} + xy'z}^{xz}$$

Asociando pares de minitérminos hasta que no ha quedado ninguno libre hemos obtenido una expresión algebraica más simple que la canónica para la función F(x,y,z).

$$f(x,y,z)=x'z'+y'z'+yz+xz \qquad (1)$$

La expresión (1) aunque es irreducible (no se puede volver a aplicar el método de reducción al no haber ningún par de términos adyacentes) no es mínima ya que hay otras asociaciones de minitérminos que implican una mayor reducción de literales (variables) y/o términos. Por ejemplo:

$$x'z' \qquad yz \qquad xy'$$

$$F(x,y,z) = x'yz' + x'y'z' + xy'z' + x'yz + xyz + xy'z$$

$$x'y \qquad y'z' \qquad xz$$

Con otras asociaciones de minitérminos adyacentes hemos encontrado dos expresiones irreducibles y en este caso también mínimas para la función F(x,y,z).

$$F(x,y,z)=x'z'+yz+xy' \tag{2}$$

$$F(x,y,z)=x'y+y'z'+xz \tag{3}$$

Como se ha podido comprobar, hemos utilizado un mismo minitérmino dos veces en la simplificación. Esto es lícito ya que se cumple la ley de idempotencia (X+X=X).

(1) Una expresión irreducible no es necesariamente mínima

(2), (3) La expresión mínima para una función no es siempre única

Método poco sistemático, no asegura un resultado óptimo y se complica al aumentar el número de variables.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES MINIMAS

- **DEFINICION: Sean $F(X_1,X_2,X_3,...,X_N)$ y $G(X_1,X_2,X_3,...,X_N)$ dos funciones booleanas. Se dice que F cubre a G, y se representa por $F \supseteq G$, si siempre que G toma el valor lógico 1, F también lo toma.**

- **DEFINICION: Sea $F(X_1,X_2,...,X_N)$ una función booleana y $H(X_1, X_2,...,X_N)$ un producto de literales. Si F cubre a H, se dice que H implica a F, o bien que H es un implicado de F, y se representa por $H \rightarrow F$.**

EJEMPLO: Si $F(w,x,y,z)=wx+yz$ y $H(w,x,y,z)=wxy'$, entonces F cubre a H y H implica a F.

Todos los minitérminos de una función son implicados de la misma

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES MINIMAS

- **DEFINICION: Un producto de literales p se dice que es un implicado primo de F si, y solo si, implica a F y además cualquier subproducto obtenido de p no es un implicado de F.**

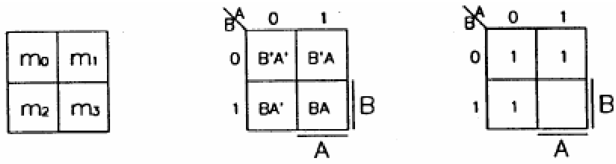
  EJEMPLO: xz es un implicado primo de F=xz+yz+x'z', ya que implica a F y además ni x ni z por separado son implicados de F.

- **TEOREMA: Cualquier expresión irreducible en suma de productos equivalente a F es una unión de implicados primos de F.**

- **DEFINICION: Un implicado primo de F se dice que es esencial si cubre al menos a un minitérmino de la función que no puede ser cubierto por ningún otro implicado primo de la misma.**

MAPAS DE KARNAUGH

Forma modificada de la tabla de verdad en la que la distribución de las combinaciones binarias es particularmente útil para simplificar. Los minitérminos adyacentes ocupan posiciones físicamente contiguas.

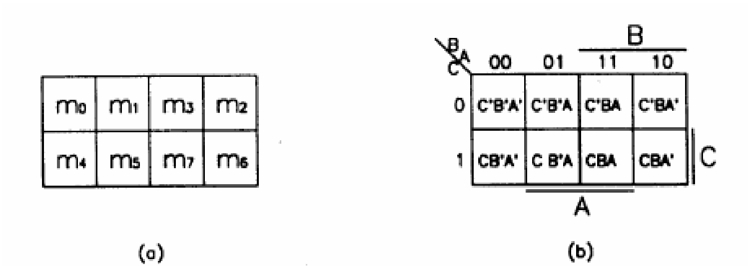


(a) (b) (c) **f(B,A)=$\sum_2(0,1,2)$**

Mapa de Karnaugh para dos variables.

MAPAS DE KARNAUGH

Forma modificada de la tabla de verdad en la que la distribución de las combinaciones binarias es particularmente útil para simplificar. Los minitérminos adyacentes ocupan posiciones físicamente contiguas.

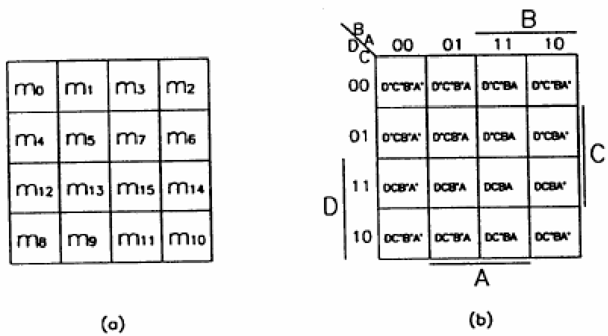


Mapa de Karnaugh para tres variables.

Adyacencia entre bordes laterales

MAPAS DE KARNAUGH

Forma modificada de la tabla de verdad en la que la distribución de las combinaciones binarias es particularmente útil para simplificar. Los minitérminos adyacentes ocupan posiciones físicamente contiguas.



Mapa de Karnaugh para cuatro variables.

Adyacencia entre bordes laterales

REGLAS GENERALES PARA LA SIMPLIFICACION DE FUNCIONES BOOLENAS POR EL METODO DE KARNAUGH

1.- Se deben formar agrupaciones de 2^K minitérminos (1,2,4, 8,..,2^K). Con el fin de que la simplificación sea máxima, se tomarán el menor número de grupos con el mayor número de minitérminos en cada uno.

2.- Todos los cuadros (minitérminos) incluidos en un grupo de 2^K deben ser adyacentes a otros K cuadros del mismo grupo. Esta condición se satisface si, y solo si, los cuadros incluidos en un grupo forman en el mapa únicamente cuadrados o rectángulos.

3.- Todos los unos del mapa deben estar contenidos al menos en un grupo, es decir, no pueden quedar unos sueltos.

4.- Con el fin de formar grupos lo más grandes posible, se pueden asociar unos ya contenidos en un grupo con otro u otros unos sueltos.

5.- Se eliminarán los grupos en los que todos sus unos estén contenidos en otros grupos.

REGLAS GENERALES PARA LA SIMPLIFICACION DE FUNCIONES BOOLENAS POR EL METODO DE KARNAUGH

Procedimiento práctico:

* Se toman todos los unos que no se pueden combinar con ningún otro.

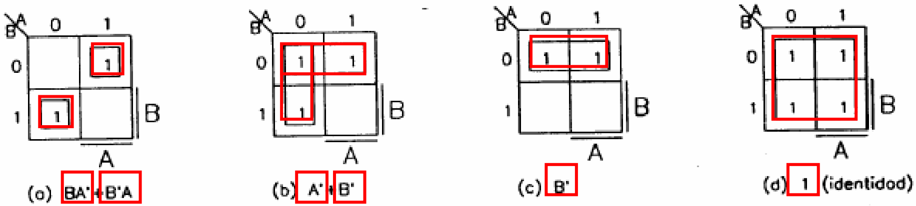
* Se forman grupos de dos unos que no puedan formar grupos de cuatro.

* Se forman grupos de cuatro unos que no puedan formar grupos de ocho.

* Así sucesivamente hasta que se cubran todos los unos del mapa

EJEMPLOS

$F(B,A)=\sum_2(1,2)$ $F(B,A)=\sum_2(0,1,2)$ $F(B,A)=\sum_2(0,1)$ $F(B,A)=\sum_2(0,1,2,3)$



•Se marca con un 1 los cuadros correspondientes a los minitérminos de la función.

•Formarán parte del término producto, las variables que no cambian de valor dentro del grupo, en forma directa si tienen el valor 1, o en forma negada si tienen el valor 0.

(a) $F=\sum_3(1,3,4,5)$

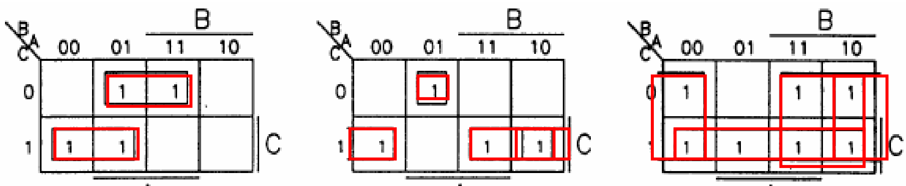
(b) $F=\sum_3(1,4,6,7)$

(c) $F=\sum_3(0,2,3,4,5,6,7)$

(d) $F=\sum_3(1,2,3,4,5,7)$

(e), (f) $F=\sum_3(0,2,4,5,7)$

(g), (h), (i) $F=\sum_3(0,2,3,4,5,7)$



(a) F=CB'+C'A (b) F=C'B'A+CA'+CB (c) F=C+A'+B

(a) $F=\sum_3(1,3,4,5)$

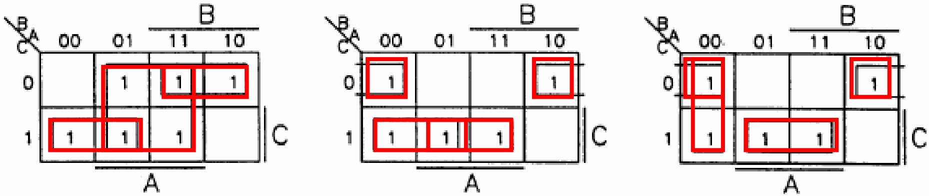
(b) $F=\sum_3(1,4,6,7)$

(c) $F=\sum_3(0,2,3,4,5,6,7)$

(d) $F=\sum_3(1,2,3,4,5,7)$

(e), (f) $F=\sum_3(0,2,4,5,7)$

(g), (h), (i) $F=\sum_3(0,2,3,4,5,7)$



(d) F=A+CB'+C'B

(e) F=C'A'+CB'+CA

(f) F=C'A'+B'A'+CA

(a) $F=\sum_3(1,3,4,5)$

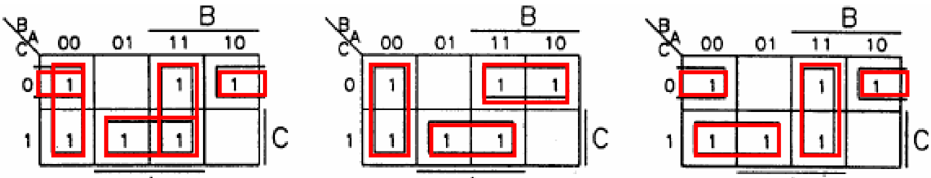
(b) $F=\sum_3(1,4,6,7)$

(c) $F=\sum_3(0,2,3,4,5,6,7)$

(d) $F=\sum_3(1,2,3,4,5,7)$

(e), (f) $F=\sum_3(0,2,4,5,7)$

(g), (h), (i) $F=\sum_3(0,2,3,4,5,7)$



(g) F=C'A'+B'A'+CA+BA

(h) F=B'A'+CA+C'B

(i) F=C'A'+CB'+BA

(a) $F(D,C,B,A)=\sum_4(2,3,5,7,13,15)$

(b) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,2,3,4,6,7,8,12,13)$

(c) y (d) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,2,4,5,6,7,8,10,13,15)$

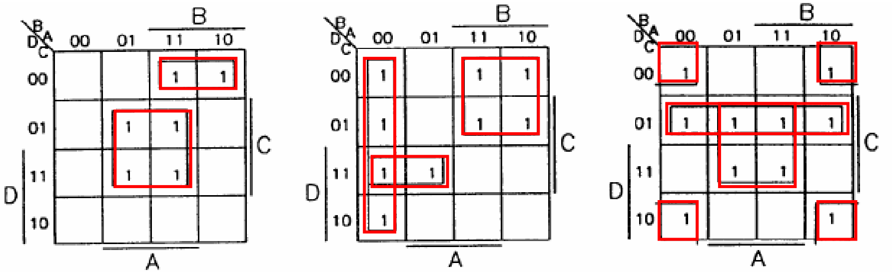
(e) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,14)$

(f) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,3,4,5,6,7,9,12,14,15)$

(g) $F(D,C,B,A)=\sum_4(1,5,6,7,11,12,13,15)$

(h) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,4,6,8,10,12,13)$

(i) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,2,5,6,7,8,12,13,15)$



(a) F=CA+D'C'B   (b) F=B'A'+D'B+DCB'   (c) F=D'C+CA+C'A'

(a) $F(D,C,B,A)=\sum_4(2,3,5,7,13,15)$

(b) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,2,3,4,6,7,8,12,13)$

(c) y (d) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,2,4,5,6,7,8,10,13,15)$

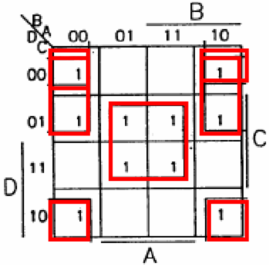
(e) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,14)$

(f) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,3,4,5,6,7,9,12,14,15)$

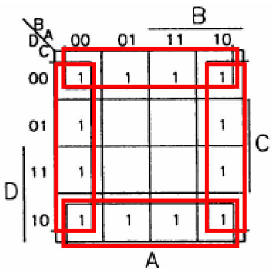
(g) $F(D,C,B,A)=\sum_4(1,5,6,7,11,12,13,15)$

(h) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,4,6,8,10,12,13)$

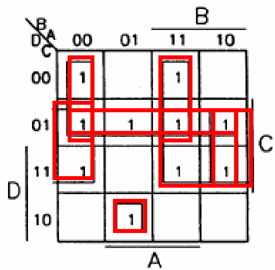
(i) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,2,5,6,7,8,12,13,15)$



(d) F=CA+D'A'+C'A'



(e) F=A'+C'



(f) F=D'C+CB+CA'+D'B'A'+D'BA+DC'B'A

(a) $F(D,C,B,A)=\sum_4(2,3,5,7,13,15)$

(b) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,2,3,4,6,7,8,12,13)$

(c) y (d) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,2,4,5,6,7,8,10,13,15)$

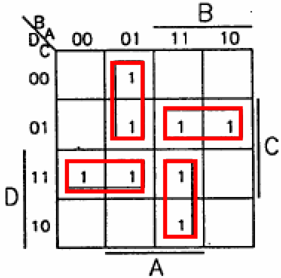
(e) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,14)$

(f) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,3,4,5,6,7,9,12,14,15)$

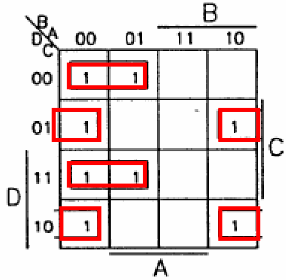
(g) $F(D,C,B,A)=\sum_4(1,5,6,7,11,12,13,15)$

(h) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,4,6,8,10,12,13)$

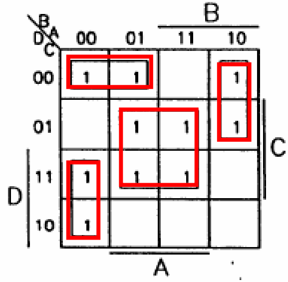
(i) $F(D,C,B,A)=\sum_4(0,1,2,5,6,7,8,12,13,15)$



(g) F=DCB'+D'B'A+D'CB+DBA



(h) F=D'C'B'+D'CA'+DCB'+DC'A'

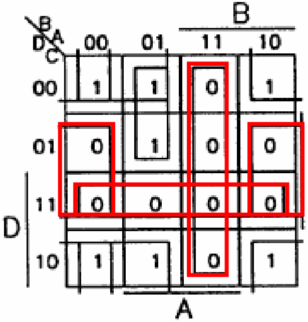


(i) F=CA+D'C'B'+D'BA'+DB'A'

EXPRESIONES MINIMAS EN PRODUCTO DE SUMAS

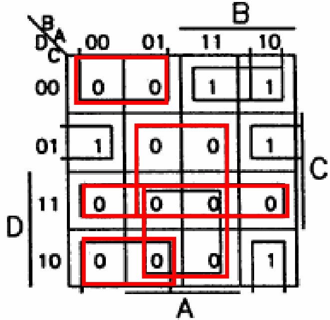
- El procedimiento es dual al anterior.
- Sobre el mapa de unos haremos grupos con los ceros, siguiendo las mismas reglas que para el caso de los unos.
- De cada asociación de ceros obtendremos un término suma en el que han desaparecido las variables que cambian de valor dentro del grupo.
- Las que no cambian de valor irán en forma directa si tienen el valor 0 y en forma negada si tienen el valor 1 (al contrario que para el caso de suma de productos).

F(D,C,B,A)=$\sum_4$(0,1,2,5,8,9,10)



(a) F=C'B'+C'A'+D'B'A=
=(C'+A)(D'+C')(B'+A')

F(D,C,B,A)=$\sum_4$(2,3,4,6,10)



(b) F=C'BA'+D'CA'+D'C'B=
=(C+B)(C'+A')(D'+A')(D'+C')

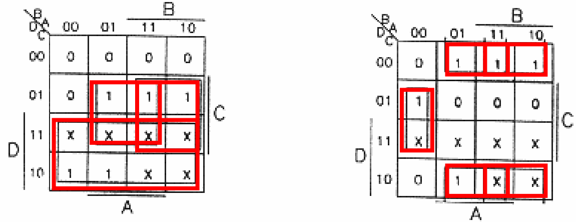
FUNCIONES INCOMPLETAMENTE DEFINIDAS

Número decimal	BCD nat. D C B A	BCD exc. 3 P Q R S
0	0 0 0 0	0 0 1 1
1	0 0 0 1	0 1 0 0
2	0 0 1 0	0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 1 1 0
4	0 1 0 0	0 1 1 1
5	0 1 0 1	1 0 0 0
6	0 1 1 0	1 0 0 1
7	0 1 1 1	1 0 1 0
8	1 0 0 0	1 0 1 1
9	1 0 0 1	1 1 0 0

- **No están definidas para todas las combinaciones de sus variables.**
- **En su simplificación estas combinaciones indefinidas (X) se considerarán como 0 o 1 dependiendo de cómo se consiga una mayor simplificación.**

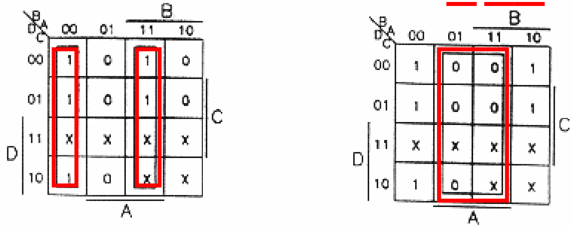
$$P = \Sigma_4(5,6,7,8,9) + \Sigma_\varnothing(10,11,12,13,14,15)$$
$$Q = \Sigma_4(1,2,3,4,9) + \Sigma_\varnothing(10,11,12,13,14,15)$$
$$R = \Sigma_4(0,3,4,7,8) + \Sigma_\varnothing(10,11,12,13,14,15)$$
$$S = \Sigma_4(0,2,4,6,8) + \Sigma_\varnothing(10,11,12,13,14,15)$$

$$P = \Sigma_4(5,6,7,8,9) + \Sigma_{\varnothing}(10,11,12,13,14,15)$$
$$Q = \Sigma_4(1,2,3,4,9) + \Sigma_{\varnothing}(10,11,12,13,14,15)$$
$$R = \Sigma_4(0,3,4,7,8) + \Sigma_{\varnothing}(10,11,12,13,14,15)$$
$$S = \Sigma_4(0,2,4,6,8) + \Sigma_{\varnothing}(10,11,12,13,14,15)$$



(a) P=D+CA+CB

(b) Q=CB'A'+C'A+C'B



(c) R=B'A'+BA

(d) S=A'